对一道中考试题的再思考

江苏省常州市武进区前黄实验学校　徐宏

电话：13601503385　　　电子邮箱：121224961@qq.com

通讯地址：江苏常州市武进区前黄镇新园路 14 号前黄实验学校　　邮编：213172

文献[1]对 2014 年宁波市中考数学第 25 题作了深入的思考和探究，本地区的一次统考中也选用此题作为压轴题，笔者在解答此题过程中也有一些思考，特撰文呈现，望能得到同仁指导。

1　试题呈现

课本的作业题中有这样一道题：把一张顶角为 36°的等腰三角形纸片剪两刀，分成 3 张小纸片，使每张小纸片都是等腰三角形，你能办到吗？请画示意图说明剪法.

我们有多种剪法，图 1 是其中的一种方法：

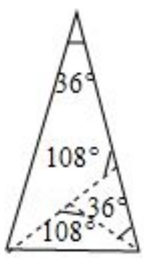


图1

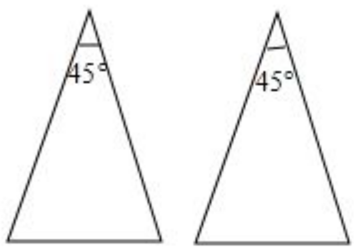


图2

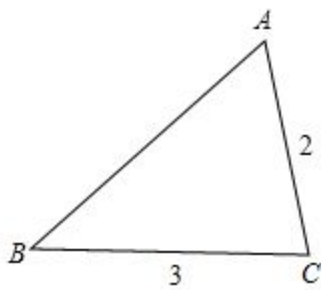


图3

定义：如果两条线段将一个三角形分成 3 个等腰三角形，我们把这两条线段叫做这个三角形的三分线.

（1）请你在图 2 中用两种不同的方法画出顶角为 45°的等腰三角形的三分线，并标注每个等腰三角形顶角的度数；（若两种方法分得的三角形成 3 对全等三角形，则视为同一种）；

（2）$\triangle ABC$ 中，$\angle B=30°$，AD 和 DE 是$\triangle ABC$ 的三分线，点 D 在 BC 边上，点 E 在 AC 边上，且 $AD=BD$，$DE=CE$，设$\angle C=x°$，试画出示意图，并求出 x 所有可能的值；

（3）如图 3，$\triangle ABC$ 中，$AC=2$，$BC=3$，$\angle C=2\angle B$，请画出$\triangle ABC$ 的三分线，并求出三分线的长.

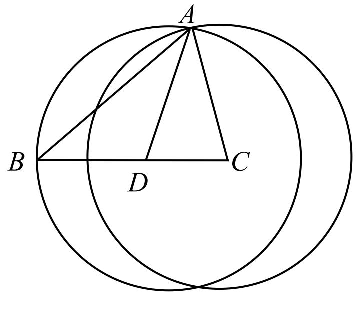
2　文献[1]的作图方法

作图的核心是角的转换，构造等腰三角形，利用三角形外角的性质解决问题.

作法：（1）在射线上连续截取 3 个单位长度确定线段 BC，以 C 为圆心，2 个单位长度为半径画⊙C；

（2）在线段 BC 取点 D，使 $BD=AC$，以 D 为圆心，AC 长为半径画圆交⊙C 于点 A；

（3）联结 AB、AC，$\triangle ABC$ 即为所求（如图）.



3　思考与探究

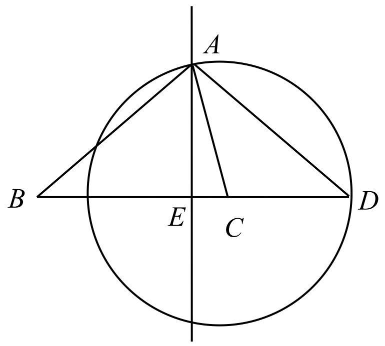
3.1 另一种作图方法

作图的核心依然是角的转换，2 倍关系可以利用圆心角、圆周角的关系来转换．

作法：（1）在射线上连续截取 3 个单位长度确定线段 BC，以 C 为圆心，2 个单位长度为半径画⊙C；

（2）延长线段 BC 交⊙C 于点 D，作线段 BD 的垂直平分线交⊙C 于点 A；

（3）联结 AB、AC，△ABC 即为所求（如图）．



3.2 为什么△ABC 是确定的

初读条件："△ABC 中，AC=2，BC=3，∠C=2∠B"，感觉△ABC 不会确定，毕竟只是给出了两个角的关系，没有给出具体的度数，但问题又是求出三分线的长，那么△ABC 应该是确定．通过上面的作图方法，很快能求出∠B 和∠C 的三角函数值，Rt△ABC 中，$CE=\frac{1}{2}$，$cosC=\frac{1}{4}$；$AE=\frac{\sqrt{15}}{2}$，Rt△ABC 中，$AB=\sqrt{10}$，$\sin B=\frac{\sqrt{6}}{4}$．

由此想到在△ABC 中，直接使用三角形正弦、余弦定理去求∠B 和∠C 的三角函数值．

△ABC 中，设∠$B=\alpha$，则∠$C=2\alpha$，∠B 所对边 AC< BC，可知α 是锐角．由正弦定理得：$\frac{2}{sin\alpha}=\frac{3}{sin\left(180^\circ-3\alpha\right)}$

利用三角公式化简：$sin\left(180^\circ-3\alpha\right)=sin3\alpha=sin\left(\alpha+2\alpha\right)$

$$=sin\alpha\cdot cos2\alpha+cos\alpha\cdot sin2\alpha=sin\alpha\cdot\left(cos^2\alpha-sin^2\alpha\right)+cos\alpha\cdot 2sin\alpha cos\alpha$$

$$=3sin\alpha cos^2\alpha-sin^3\alpha=3sin\alpha\left(1-sin^2\alpha\right)-sin^3\alpha$$

$$=3sin\alpha-4sin^3\alpha,$$

代入上式计算得：$sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{4}$．

从而得到结论：∠B 是确定的，△ABC 也是确定的．

3.3 另一种解答方法

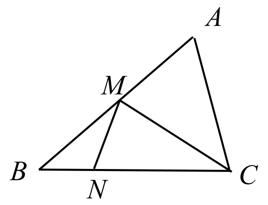
由于通过作图和正弦定理计算出了∠B 和∠C 的三角函数值，所以可以由此来计算三分线的长度．

首先考虑如何画三分线问题．由前面∠B 和∠C 的三角函数值，可得

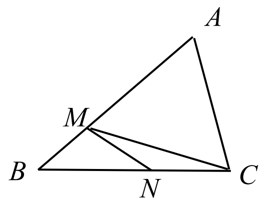
$\angle B \approx 37.7^\circ$，$\angle C \approx 75.5^\circ$，$\angle A \approx 66.8^\circ$．为便于下面说明，还是设$\angle B=\alpha$，则$\angle C=2\alpha$，$\angle A=\left(180^\circ-3\alpha\right)$．

分割一般从最大角入手．如图（1）作 CM，当 $CM=CA$ 时，$\angle ACM=180^\circ-2\left(180^\circ-3\alpha\right)=\left(6\alpha-180^\circ\right)$，$\angle BCM=2\alpha-\left(6\alpha-180^\circ\right)=\left(180^\circ-4\alpha\right)$

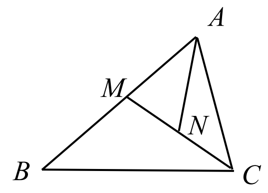
在 BC 上取点 N，使得 $CM=CN$，则底角$\angle CMN=\angle CNM=2\alpha$，又$\angle B=\alpha$，所以$\triangle BMN$也是等腰三角形．这种情况的三分线 $CM=CA=2$，$MN=BN=BC-CN=1$．



图（1）

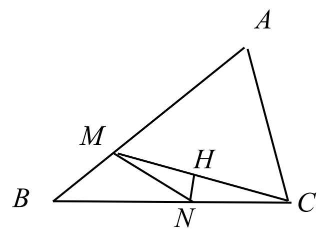


图（2）



图（3）

如图（2）当 $AC=AM$ 时，$\angle ACM=\dfrac{180^\circ-\left(180^\circ-3\alpha\right)}{2}=\dfrac{3}{2}\alpha$，所以$\angle BCM=\dfrac{1}{2}\alpha$．在$\triangle BCM$中，$\angle B$是$\angle BCM$的 2 倍．一般的，一个三角形能分割成两个等腰三角形需要满足的条件是：这个三角形是直角三角形，分割线是斜边中线；或者三角形中一个角是另一个角的 2 倍，且第三个角要大于45°，分割线就是分第三个角；或者三角形中一个角是另一个角的 3 倍，分割线就是分那个 3 倍角．由此结论，作 MN 分第三个角$\angle BMC$，使得$\angle NMC=\angle MCB$，则$\angle MNB=2\angle BCM=\alpha=\angle B$，所以$\triangle BMN$也是等腰三角形．这种情况的三分线计算：由前面作图计算得 $AB=\sqrt{10}$，三分线 $MN=BM=AB-AM=AB-AC=\sqrt{10}-2$．



由前面计算得$sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，$cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，

利用半角公式得：$cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1+cos\alpha}{2}}=\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{10}}}{4}$

作 $NH\perp MC$，在 $\mathrm{R}t\triangle NCH$ 中，$CH=CN\bullet cos\dfrac{\alpha}{2}=\left(\sqrt{10}-2\right)\bullet\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{10}}}{4}=\dfrac{\sqrt{8-\sqrt{10}}}{2}$

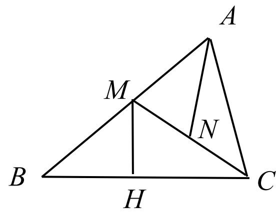
所以三分线 $CM=2\,CH=\sqrt{8-\sqrt{10}}$．

如图（3）作 CM，使得$\angle BCM=\angle B=\alpha$，在$\triangle ACM$中，同样满足一个角是另一个角的2倍，$\angle AMC=2\angle ACM=2\alpha$，分第三个角$\angle MAC$，使得$\angle NAC=\angle ACN=\alpha$，则$\angle ANM=2\angle ACN=2\alpha=\angle AMC$，所以$\triangle AMN$也是等腰三角形．

这种情况的三分线计算：由前面作图计算得

$AB=\sqrt{10}$， $cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

作 $MH\perp BC$，在 $Rt\triangle CMH$ 中，



三分线 $CM=\frac{CH}{cos\alpha}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{4}}=\frac{3}{5}\sqrt{10}$，

三分线 $AN=AM=AB-BM=AB-CM=\sqrt{10}-\frac{3}{5}\sqrt{10}=\frac{2}{5}\sqrt{10}$.

参考文献：

[1] 赵婉仙. 对一道中考试题的思考与探究[J]. 中学数学教学参考(中旬)，2014(12)，37—39.